PRÉPARATION CRPE

EXERCICES D'APPLICATION ET CORRIGÉS DÉTAILLÉS : ARITHMÉTIQUE & JEUX SUR LES NOMBRES

EXERCICE 1 : Critères de divisibilité et nombre mystère

Énoncé :

Trouver tous les nombres entiers N s'écrivant N = 4a7b sous forme décimale (où a et b sont des chiffres) tels que :

• N soit divisible par 5.

• N soit divisible par 9.

Détailler la démarche et donner toutes les solutions possibles.

Corrigé détaillé :

1. Analyse de la condition de divisibilité par 5 :

Un nombre est divisible par 5 si et seulement si son chiffre des unités est 0 ou 5.

Ici, le chiffre des unités est b. On a donc deux cas possibles : b = 0 ou b = 5.

2. Premier cas : b = 0

Le nombre s'écrit N = 4a70.

Pour que N soit divisible par 9, la somme de ses chiffres doit être un multiple de 9.

Somme S = 4 + a + 7 + 0 = 11 + a.

Comme a est un chiffre ($0 \leq a \leq 9$), $11 \leq S \leq 20$.

Le seul multiple de 9 dans cet intervalle est 18. Donc $11 + a = 18 \Longrightarrow a = 7$.

Première solution : N = 4770.

3. Deuxième cas : b = 5

Le nombre s'écrit N = 4a75.

Somme S = 4 + a + 7 + 5 = 16 + a.

Comme $0 \leq a \leq 9$, $16 \leq S \leq 25$.

Le seul multiple de 9 dans cet intervalle est 18. Donc $16 + a = 18 \Longrightarrow a = 2$.

Deuxième solution : N = 4275.

Conclusion : Les deux nombres répondant aux critères sont 4770 et 4275.

EXERCICE 2 : Problème concret de PGCD (Modélisation)

Énoncé :

Un fleuriste dispose de 126 roses rouges et de 198 tulipes blanches. Il souhaite composer des bouquets identiques en respectant les conditions suivantes :

1. Toutes les fleurs doivent être utilisées.

2. Chaque bouquet doit contenir le même nombre de roses rouges et le même nombre de tulipes blanches.

a) Quel est le nombre maximal de bouquets identiques qu'il peut réaliser ?

b) Quelle sera alors la composition de chaque bouquet ?

Corrigé détaillé :

a) Nombre maximal de bouquets :

Soit n le nombre de bouquets. Pour que toutes les fleurs soient utilisées de manière égale, n doit diviser le nombre de roses (126) et le nombre de tulipes (198).

Pour que n soit maximal, n doit être le PGCD de 126 et 198.

Décomposition en facteurs premiers :

• $126 = 2 \times 3^2 \times 7$

• $198 = 2 \times 3^2 \times 11$

Calcul du PGCD :

On choisit les facteurs premiers communs munis de leur plus petit exposant :

PGCD(126, 198) = $2^1 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18$.

Le fleuriste peut donc réaliser au maximum 18 bouquets identiques.

b) Composition de chaque bouquet :

• Nombre de roses rouges par bouquet : $126 \div 18 = 7$ roses.

• Nombre de tulipes blanches par bouquet : $198 \div 18 = 11$ tulipes.

Chaque bouquet contiendra 7 roses rouges et 11 tulipes blanches.

EXERCICE 3 : Jeu sur les nombres & Cryptarithme (Base 10)

Énoncé :

Un nombre entier à deux chiffres N = ab s'accroît de 36 lorsqu'on inverse l'ordre de ses chiffres.

1. Montrer que b - a = 4.

2. Déterminer la liste de tous les nombres entiers N vérifiant cette propriété.

3. Sachant de plus que la somme des chiffres de N est égale à 10, quel est le nombre N ?

Corrigé détaillé :

1. Preuve algébrique :

Soit N = ab = 10a + b (avec $a \in \{1,...,9\}$ et $b \in \{0,...,9\}$).

Le nombre inversé est N' = ba = 10b + a.

D'après l'énoncé, N' - N = 36.

En développant : (10b + a) - (10a + b) = 36 ⟹ 9b - 9a = 36.

En divisant par 9 : b - a = 4.

2. Liste des nombres possibles :

Comme a ≥ 1 et b ≤ 9, examinons les couples (a, b) tels que b = a + 4 :

• Si a = 1 ⟹ b = 5 ⟹ N = 15

• Si a = 2 ⟹ b = 6 ⟹ N = 26

• Si a = 3 ⟹ b = 7 ⟹ N = 37

• Si a = 4 ⟹ b = 8 ⟹ N = 48

• Si a = 5 ⟹ b = 9 ⟹ N = 59

Les nombres possibles sont donc : 15, 26, 37, 48, 59.

3. Détermination du nombre N :

Condition supplémentaire : a + b = 10.

On résout le système :

a + b = 10

b - a = 4

Addition des deux équations : 2b = 14 ⟹ b = 7.

D'où a = 7 - 4 = 3.

Le nombre recherché est N = 37. (Vérification : 37 + 36 = 73).

EXERCICE 4 : Analyse Didactique (Cycle 3)

Énoncé :

Voici un extrait d'un problème proposé à des élèves de CM2 :

« Pour la fête de l'école, l'enseignant a acheté 145 bonbons. Il veut constituer des sachets de 12 bonbons chacun. Combien de sachets complets peut-il faire ? Combien de bonbons lui restera-t-il ? »

1. Quel est le sens de la division sollicité dans ce problème (partage ou groupement) ?

2. Analyse d'erreur d'élève : L'élève Léa écrit : 145 ÷ 12 = 12,08. Elle conclut : « Il peut faire 12 sachets et il reste 8 bonbons ».

Identifiez l'erreur de conception de Léa et expliquez comment l'enseignant peut l'aider à la dépasser.

Corrigé détaillé :

1. Sens de la division :

Il s'agit d'une division de groupement (ou contenance). On cherche combien de fois une quantité connue (12 bonbons) est contenue dans le total (145 bonbons).

2. Analyse de l'erreur de Léa :

• Identification de l'erreur : Léa a effectué une division décimale à la calculatrice ou posée (145 / 12 ≈ 12,0833) au lieu de faire une division euclidienne (dans N). Elle a ensuite associé directement la partie décimale (,08) au reste en bonbons (8), assimilant à tort 0,08 sachet à 8 bonbons.

• Remédiation pédagogique :

- Faire poser la division euclidienne (avec quotient entier et reste).

- Faire repasser par la preuve de la division : 12 × 12 = 144, puis 145 - 144 = 1 reste.

- Travailler sur le sens des unités : 0,08 représente une fraction de sachet et non un nombre entier de bonbons.