# Cours de Numération — CRPE

*Rédigé par : Jawad MADKOURI*

## 1. Notre système de numération

### 1.1 Définition

Notre système de numération est un système décimal de position. Il est constitué de 10 chiffres (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) dont la position indique le nombre d'unités de la puissance de 10 indiquée par le rang.

*Exemple : $3\,405 = 3 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 5 \times 10^0$*

Il a fallu attendre le XIIe siècle pour que ce système inventé en Inde arrive en Occident.

### 1.2 Avantages et difficultés de ce système

Avantages :

- Utilisation d'un petit nombre de symboles (10 chiffres).
- Facilité de lecture quelle que soit l'importance du nombre.
- Symboles abstraits simples à écrire.
- Aucune limitation de la taille du nombre.
- Facilité des opérations (+, −, ×, ÷) grâce à des algorithmes simples.
- Algorithme de formation simple : 10 unités d'un rang égalent 1 unité du rang immédiatement supérieur (10u = 1d).

Inconvénients et difficultés :

- Symboles abstraits qui ne donnent pas de renseignements directs sur la quantité qu'ils représentent.
- Écart entre l'oralité (système mixte) et l'écriture chiffrée (système de position). Par exemple : « quatre-vingt-douze » ne s'écrit pas 8012 mais 92 ; « sept cent trois » ne s'écrit pas 7003 mais 703.
- L'algorithme de formation peut poser problème lors du franchissement des dizaines ou centaines (ex. passage de 159 à 160, ou passage à 200).

### 1.3 Écriture en lettres et oralité

Il existe des irrégularités jusqu'à 100 du fait de la variation du système et de la base au cours de l'histoire (hésitation entre base 10 et base 20 : « onze, douze... », « soixante-dix, quatre-vingts »). De plus, on dit « vingt et un » mais « vingt-deux ».

Après cent, on utilise une base de 100 associée à un nom pour chaque puissance de mille : « mille, million, milliard, billion, billiard... ». Des exceptions existent pour les dates (ex. « onze cents » pour « mille cent »).

# 2. Petit historique de la numération

## 2.1 Le système additif : l'écriture égyptienne hiéroglyphique

La base choisie est la base 10. On utilise un symbole spécifique pour chaque puissance de 10 et on répète ce symbole autant de fois qu'il y a d'unités dans cette puissance.

## 2.2 Le système additif mésopotamien

La base est sexagésimale (base 60), issue de la fusion entre les bases 5, 10 et 12. Ce système comporte une base 10 intermédiaire. Nous avons conservé cette base pour la mesure du temps (heures, minutes, secondes) et des angles.

*Exemple : 9h 32' 15'' = $9 \times 60^2 + 32 \times 60^1 + 15 = 34\,335$ secondes.*

## 2.3 Le système romain

C'est un système en base 10 avec une base intermédiaire 5. Les symboles principaux sont : I (1), V (5), X (10), L (50), C (100), D (500), M (1 000). On y associe un principe soustractif lorsqu'un symbole de valeur inférieure précède un symbole de valeur supérieure (ex. IV = 4, IX = 9, XL = 40, CD = 400).

## 2.4 Systèmes hybrides

Système hybride partiel : combine le symbole de l'unité avec un symbole pour chaque puissance de 10.

Système hybride : basé sur 9 symboles représentant les chiffres de 1 à 9, combinés à un symbole pour chaque puissance de 10 (ex. numération chinoise, écriture des nombres en lettres).

## 2.5 Système de position

Utilisé à Babylone, en Chine et chez les Mayas. Il associe la valeur d'un chiffre à son rang. Le zéro sert à indiquer l'absence d'unité dans un rang donné (les Mayas utilisaient un coquillage pour le zéro dans un système en base 20).

## 2.6 Avant l'écriture

Avant l'apparition de l'écriture, les quantités étaient comptabilisées au moyen d'entailles sur des os ou du bois, avec les doigts de la main, ou avec des ficelles à nœuds.

# 3. Notion de base

## 3.1 Définition

Dans un système de position en base n, un nombre s'écrit à l'aide de n chiffres distincts (de 0 à n-1). Un nombre à trois chiffres abc en base n s'exprime dans notre système décimal par :

**Formule :** abc (base n) = $a \times n^2 + b \times n^1 + c \times n^0$

- En base 2 (binaire) : 2 chiffres (0 et 1). Exemple : $110111_2 = 1\times2^5 + 1\times2^4 + 0\times2^3 + 1\times2^2 + 1\times2^1 + 1\times2^0 = 55$.
- En base 5 : 5 chiffres (0, 1, 2, 3, 4). Exemple : $231_5 = 2\times5^2 + 3\times5^1 + 1\times5^0 = 50 + 15 + 1 = 66$.
- En base 12 (duodécimale) : 12 chiffres (0 à 9, A pour 10, B pour 11). Exemple : $1A6_{12} = 1\times12^2 + 10\times12^1 + 6\times12^0 = 144 + 120 + 6 = 270$.

### 3.2 Conversion d'un nombre vers une base n

Pour déterminer l'écriture d'un nombre décimal dans un système en base n, on effectue des divisions successives par n. On réassemble le nombre en prenant le dernier quotient suivi des restes successifs remontés de la dernière à la première division.

- 23 en base 2 : 23 ÷ 2 = 11 (reste 1) | 11 ÷ 2 = 5 (reste 1) | 5 ÷ 2 = 2 (reste 1) | 2 ÷ 2 = 1 (reste 0) → 23 = $10111_2$.
- 52 en base 5 : 52 ÷ 5 = 10 (reste 2) | 10 ÷ 5 = 2 (reste 0) → 52 = $202_5$.
- 550 en base 12 : 550 ÷ 12 = 45 (reste 10 = α) | 45 ÷ 12 = 3 (reste 9) → 550 = $39\alpha_{12}$.