PRÉPARATION AU CRPE – MATHÉMATIQUES

Grandeurs fondamentales et premières conversions

Cycle 3 (CM1, CM2, 6e) et cycle 4 (5e, 4e, 3e)

Objectifs du chapitre
- Maîtriser les notions de grandeur, de mesure et d'unité, et les distinguer rigoureusement.
- Convertir sans erreur longueurs, masses, contenances, durées, aires, volumes, puis vitesses, débits et masses volumiques.
- Connaître la progression entre le cycle 3 et le cycle 4 et savoir la justifier.
- Repérer les erreurs types des élèves et savoir proposer une remédiation (attendu de l'épreuve écrite du CRPE).

1. Les notions fondamentales (socle commun aux cycles 3 et 4)

1.1 Grandeur, mesure, unité

- **Grandeur** : propriété d'un objet que l'on peut comparer (longueur d'un segment, masse d'un objet, durée d'un trajet, aire d'une surface…).
- **Unité** : grandeur de référence choisie pour mesurer (le mètre, le gramme, la seconde, le litre…).
- **Mesure** : nombre qui exprime combien de fois l'unité « entre » dans la grandeur. Elle dépend de l'unité choisie.

Exemple : la longueur du segment [AB] est une grandeur ; sa mesure est 4,5 si l'unité est le cm, et 45 si l'unité est le mm. **La grandeur ne change pas, seule sa mesure change.** C'est tout l'enjeu d'une conversion.

À retenir
Plus l'unité est grande, plus la mesure est petite (et réciproquement).
Ex. : 2 m = 200 cm : l'unité cm est 100 fois plus petite, donc la mesure est 100 fois plus grande.

1.2 Les trois étapes de l'apprentissage

Étape	Contenu	Exemple
1. Comparer	Sans mesurer : comparaison directe (superposition) ou indirecte (par un intermédiaire, un gabarit, un report).	Comparer deux bandes de papier ; comparer deux aires par découpage-recollement.
2. Mesurer	Reporter une unité (non conventionnelle puis conventionnelle) et dénombrer.	Mesurer une longueur en « pas » puis en cm.
3. Calculer, convertir	Utiliser des formules, changer d'unité, calculer avec les mesures.	Aire d'un rectangle ; passer de 3 h 45 min à des minutes.

1.3 Grandeurs mesurables et grandeurs repérables

Une grandeur est **mesurable** si l'on peut l'additionner de façon cohérente (longueur, masse, durée, aire, volume). Elle est seulement **repérable** si on peut la situer sur une échelle sans pouvoir additionner (température, date, altitude).

- 10 cm + 10 cm = 20 cm : on peut dire « deux fois plus long ».
- 10 °C + 10 °C n'a pas de sens physique : 20 °C n'est pas « deux fois plus chaud » que 10 °C.

- Une **date** est repérable, une **durée** est mesurable.

1.4 Système décimal et système sexagésimal

Les longueurs, masses et contenances suivent le **système décimal** : chaque unité vaut 10 fois la suivante, ce qui permet d'utiliser les préfixes du système international (kilo = 1 000, hecto = 100, déca = 10, déci = 1/10, centi = 1/100, milli = 1/1 000). Les durées suivent un système **sexagésimal** (base 60) pour les heures, minutes et secondes, et d'autres bases pour les jours, semaines, mois.

2. Cycle 3 : CM1, CM2, 6e

2.1 Ce que demandent les programmes

- Comparer, estimer, mesurer des **longueurs (périmètre), masses, contenances, durées, aires, volumes, angles**, avec des nombres entiers et décimaux.
- Utiliser le lexique, les unités usuelles et les instruments de mesure.
- Convertir à l'intérieur d'un même système d'unités, en s'appuyant sur la numération décimale.
- Relier les unités de volume et de contenance (en 6e).
- Calculer des durées et des horaires.

Remarque : se référer toujours à la version en vigueur des programmes du BO, qui font foi pour le concours.

2.2 Longueurs, masses, contenances : le tableau de conversion

	kilo (k)	hecto (h)	déca (da)	unité	déci (d)	centi (c)	milli (m)
Longueur	km	hm	dam	m	dm	cm	mm
Masse	kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
Contenance	kL	hL	daL	L	dL	cL	mL

Méthode : chaque unité est 10 fois plus grande que la suivante. On place le chiffre des unités dans la colonne de l'unité de départ, puis on lit le nombre en s'arrêtant à la colonne de l'unité d'arrivée (en complétant par des zéros).

- 4,25 m = **425 cm** (on passe à une unité 100 fois plus petite : × 100).
- 3 450 g = **3,45 kg** (unité 1 000 fois plus grande : ÷ 1 000).
- 0,75 L = **75 cL** = 750 mL.
- 1 tonne = 1 000 kg ; 1 quintal = 100 kg (unités courantes, hors tableau).

> **Attention à l'écriture**
> 3,5 m se lit « trois mètres cinquante centimètres » : 3,5 m = 3 m 50 cm et non 3 m 5 cm.

2.3 Les durées

Unité	Équivalence
1 heure	60 minutes = 3 600 secondes
1 minute	60 secondes
1 jour	24 heures

Unité	Équivalence
1 semaine	7 jours
1 an	12 mois ; 365 ou 366 jours

- 1 h 45 min = 60 + 45 = **105 min**.
- 3 h 20 min + 2 h 50 min = 5 h 70 min = **6 h 10 min** (on convertit les 70 min en 1 h 10 min).
- Durée entre 14 h 35 et 17 h 10 : 14 h 35 → 15 h (25 min) → 17 h (2 h) → 17 h 10 (10 min), soit **2 h 35 min**.
- Piège : 1,5 h = 1 h 30 min (et non 1 h 50 min), car la base n'est pas 10.

2.4 Les aires

L'**aire** mesure l'étendue d'une surface. Elle se comprend d'abord par comparaison (recouvrement, pavage), puis par dénombrement d'unités d'aire (carreaux, cm²), avant les formules : rectangle (L × l), triangle, disque (en 6e).

Règle essentielle : une unité d'aire est 100 fois plus grande que la suivante (car il y a 10 × 10 petits carrés dans un carré de côté 10 fois plus grand). Dans un tableau de conversion, chaque unité occupe donc **deux colonnes**.

km²		hm²		dam²		m²		dm²		cm²		mm²	
0	0	0	0	0	0	0	3	5	0	0	0	0	0

*Lecture : 3 m² + 50 dm². On a donc 3,5 m² = **350 dm²** = 35 000 cm² (on complète par des zéros).*

- 2,3 m² = **230 dm²** (× 100).
- 7 500 cm² = **0,75 m²** (÷ 10 000, soit deux étapes de ÷ 100).
- **Unités agraires** : 1 are (a) = 100 m² ; 1 hectare (ha) = 10 000 m² ; 1 km² = 100 ha.

2.5 Volumes et contenances

En fin de cycle 3, on relie **volume** (espace occupé) et **contenance** (quantité de liquide pouvant être contenue) :

> **Équivalences à connaître**
> 1 L = 1 dm³ • 1 mL = 1 cm³ • 1 m³ = 1 000 L = 1 000 dm³
> Une unité de volume est **1 000 fois** plus grande que la suivante (10 × 10 × 10).

- Un pavé droit de 20 cm × 10 cm × 5 cm a un volume de 1 000 cm³, soit 1 dm³ = **1 L**.
- 2,5 L = 2,5 dm³ = **2 500 cm³**.
- Une piscine de 12 m³ contient **12 000 L** d'eau.

2.6 Points de vigilance (analyse d'erreurs)

Erreur d'élève	Origine probable	Remédiation
« 3 m² = 300 dm² »	Généralisation abusive de « × 10 » ou « × 100 » des longueurs aux aires.	Dessiner un carré de 1 m de côté, le paver avec des carrés de 1 dm : 10 × 10 = 100.

Erreur d'élève	Origine probable	Remédiation
« 3,5 m = 3 m 5 cm »	Lecture de la partie décimale comme un nombre entier de centimètres.	Tableau de conversion ; passer par 3,5 m = 35 dm = 350 cm.
« 1,5 h = 1 h 50 min »	Confusion entre écriture décimale et système sexagésimal.	Schématiser une horloge : 0,5 h = 30 min.
Confondre aire et périmètre	Les deux se calculent à partir des mêmes longueurs.	Figures de même périmètre et d'aires différentes (et inversement).
« 2 450 mL = 2,45 mL »	Virgule déplacée sans repère d'unité.	Contrôler l'ordre de grandeur : 2 450 mL est environ 2 L.

3. Cycle 4 : 5e, 4e, 3e

3.1 Ce que demandent les programmes

- Calculer avec des **grandeurs mesurables** et exprimer les résultats dans les unités adaptées.
- Utiliser les **grandeurs produits et quotients** : vitesse, débit, masse volumique, consommation, kWh…
- Maîtriser les **conversions d'aires et de volumes** et les formules associées (prismes, cylindres, pyramides, cônes, boules).
- Comprendre l'effet d'un **agrandissement ou d'une réduction** sur longueurs, aires et volumes.
- Utiliser les **puissances de 10** et la **notation scientifique** pour les très grands et très petits nombres.

3.2 Conversions d'aires et de volumes avec les puissances de 10

Longueur	Aire	Volume
1 m = 10 dm = 10^2 cm	1 m^2 = 10^2 dm^2 = 10^4 cm^2	1 m^3 = 10^3 dm^3 = 10^6 cm^3
1 cm = 10^{-2} m	1 cm^2 = 10^{-4} m^2	1 cm^3 = 10^{-6} m^3
1 km = 10^3 m	1 km^2 = 10^6 m^2	1 km^3 = 10^9 m^3

Principe : si les longueurs sont multipliées par k, les aires le sont par k^2 et les volumes par k^3. Pour convertir une unité de longueur en une unité 10^n fois plus petite, on multiplie les aires par 10^{2n} et les volumes par 10^{3n}.

- 4,5 cm^2 = 4,5 × 10^{-4} m^2 = **0,000 45 m^2**.
- 0,3 m^3 = 300 dm^3 = **300 L**.
- 2 500 000 mm^3 = 2 500 cm^3 = 2,5 dm^3 = **2,5 L**.
- Rectangle de 2,5 m sur 40 cm : on **convertit d'abord** (40 cm = 0,4 m), puis aire = 2,5 × 0,4 = **1 m^2**.

3.3 Grandeurs quotients : vitesse, débit, masse volumique

Une **grandeur quotient** s'exprime par un rapport entre deux grandeurs : son unité est « composée » (km/h, L/min, g/cm^3).

Grandeur	Formule	Unités usuelles	Exemple de conversion
Vitesse	v = d ÷ t	km/h ; m/s	36 km/h = 36 000 m ÷ 3 600 s = **10 m/s** ; 1 m/s = 3,6 km/h

Grandeur	Formule	Unités usuelles	Exemple de conversion
Débit	q = V ÷ t	L/min ; m³/h	18 L/min = 18 × 60 = **1 080 L/h** = 1,08 m³/h
Masse volumique	ρ = m ÷ V	g/cm³ ; kg/m³ ; kg/L	1 g/cm³ = 1 kg/L = **1 000 kg/m³** (cas de l'eau)
Consommation	L pour 100 km	L/100 km	6 L/100 km pour 250 km : 6 × 2,5 = **15 L**

Méthode pour convertir une unité composée
1) On convertit **séparément** le numérateur et le dénominateur.
2) On vérifie l'ordre de grandeur (un piéton à 5 km/h marche à environ 1,4 m/s).
3) Pour une vitesse : km/h → m/s, on **divise par 3,6** ; m/s → km/h, on **multiplie par 3,6**.

- Distance parcourue en 45 min à 80 km/h : 45 min = 0,75 h, donc d = 80 × 0,75 = **60 km**.
- Durée pour parcourir 150 km à 90 km/h : 150 ÷ 90 = 1,666… h, soit **1 h 40 min** (0,666… h × 60 = 40 min).
- Masse de 5 L d'huile de masse volumique 0,92 kg/L : 5 × 0,92 = **4,6 kg**.

3.4 Grandeurs produits

Le produit de deux grandeurs donne une nouvelle grandeur : longueur × longueur = **aire** (m²), aire × longueur = **volume** (m³), puissance × durée = **énergie** (kWh). Ainsi 1 kWh = 1 000 W × 3 600 s = 3 600 000 J = **3,6 MJ**.

3.5 Agrandissement et réduction

Pour un coefficient k appliqué aux longueurs : les **aires** sont multipliées par **k²**, les **volumes** par **k³**.

- k = 3 : longueurs × 3, aires × 9, volumes × 27.
- k = 0,5 : longueurs ÷ 2, aires ÷ 4, volumes ÷ 8.
- Une maquette à l'échelle 1/50 : 1 cm sur la maquette représente 50 cm en réalité ; 1 cm² représente 2 500 cm² ; 1 cm³ représente 125 000 cm³.

3.6 Notation scientifique et préfixes

Un nombre est en **notation scientifique** s'il s'écrit $a \times 10^n$ avec $1 \leq a < 10$ et n entier relatif.

- 300 000 000 m/s (vitesse de la lumière) = **3×10^8 m/s**.
- 0,000 000 5 m = **5×10^{-7} m** = 500 nm (1 nm = 10^{-9} m).
- Préfixes : méga (M) = 10^6 ; giga (G) = 10^9 ; micro (µ) = 10^{-6} ; nano (n) = 10^{-9}.

3.7 Points de vigilance (analyse d'erreurs)

Erreur d'élève	Origine probable	Remédiation
« 1 m³ = 100 dm³ »	Extension du facteur 100 des aires aux volumes.	Cube de 1 m d'arête rempli de cubes de 1 dm : 10 × 10 × 10 = 1 000.
« 90 km/h = 90 m/s »	Unité « h » ou « s » oubliée dans la conversion.	Convertir séparément 90 km = 90 000 m et 1 h = 3 600 s.
« agrandissement × 2 : aire × 2 »	Confusion entre coefficient sur les longueurs et sur les aires.	Quadrillage : doubler les côtés d'un carré (4 fois plus de carreaux).

Erreur d'élève	Origine probable	Remédiation
Calculer sans homogénéiser les unités	Oubli d'une étape de conversion avant le calcul.	Exiger l'écriture des unités à chaque ligne du calcul.
« 2 h 30 min = 2,30 h »	Confusion décimal / sexagésimal.	30 min = 0,5 h, donc 2,5 h.

4. Synthèse : cycle 3 et cycle 4

	Cycle 3	Cycle 4
Grandeurs	Longueur, masse, contenance, durée, aire, angle, volume (initiation).	Les mêmes, plus grandeurs produits et quotients.
Conversions	Dans un même système : tableau de conversion, × ou ÷ par 10, 100, 1 000.	Aires, volumes, unités composées, puissances de 10.
Aires et volumes	Aire d'un rectangle, triangle, disque ; volume du pavé droit ; 1 L = 1 dm³.	Volumes de prismes, cylindres, pyramides, cônes, boules ; effet de k, k², k³.
Nombres	Entiers et décimaux.	Rationnels, puissances de 10, notation scientifique.
Démarche	Manipuler, comparer, mesurer, estimer.	Modéliser, calculer, justifier, contrôler la cohérence des unités.

5. Fiche mémo des conversions

Grandeur	Équivalences essentielles
Longueur	1 km = 1 000 m ; 1 m = 10 dm = 100 cm = 1 000 mm
Masse	1 t = 1 000 kg ; 1 kg = 1 000 g ; 1 g = 1 000 mg
Contenance	1 L = 10 dL = 100 cL = 1 000 mL
Durée	1 h = 60 min = 3 600 s ; 1 j = 24 h
Aire	1 m² = 100 dm² = 10 000 cm² ; 1 a = 100 m² ; 1 ha = 10 000 m²
Volume	1 m³ = 1 000 dm³ = 1 000 000 cm³ ; 1 dm³ = 1 L ; 1 cm³ = 1 mL
Vitesse	1 m/s = 3,6 km/h
Masse volumique de l'eau	1 g/cm³ = 1 kg/L = 1 000 kg/m³

6. Conseils pour l'épreuve du CRPE

- **Toujours écrire l'unité** dans le résultat et dans les étapes de calcul.
- **Contrôler l'ordre de grandeur** : un résultat absurde (une piscine de 12 L, un piéton à 50 m/s) est une erreur de conversion.
- Dans les questions de **didactique**, nommer l'erreur, proposer une cause (obstacle, généralisation abusive, confusion de systèmes) puis une remédiation concrète (manipulation, schéma, tableau).
- Savoir **justifier la progression** : comparer → mesurer → calculer, et du cycle 3 au cycle 4 : de la manipulation vers la modélisation.
- Pour un énoncé à plusieurs étapes, **convertir en premier** toutes les données dans la même unité.