Introduction à la géométrie plane : figures et propriétés

Cours de préparation au concours. La première partie suit le cycle 3 (CM1, CM2, 6e), la seconde le cycle 4 (5e, 4e, 3e). Chaque chapitre donne les savoirs, les obstacles didactiques et un exemple type concours.

Cadre théorique : dessin, figure et paradigmes géométriques

Dessin et figure. Un dessin est une trace matérielle (sur papier ou à l'écran). Une figure est l'objet géométrique défini par un texte ou un codage : c'est l'ensemble des propriétés qui lui sont attachées. Un même dessin peut représenter plusieurs figures, et une figure possède une infinité de dessins.

Les trois géométries (Houdement et Kuzniak).

Paradigme	Validation	Outils	Niveau
G1 géométrie naturelle	Perception, comparaison	Pliage, découpage, calque	Cycles 1 et 2, début du cycle 3
G2 géométrie axiomatique naturelle	Mesure, instruments, propriétés admises	Règle, équerre, compas, logiciel	Cycle 3 et début du cycle 4
G3 géométrie axiomatique	Démonstration	Définitions, propriétés, raisonnement	Fin du cycle 4 et lycée

Le passage de G1 à G2 puis à G3 est le fil conducteur du cours. À chaque notion, demandez-vous : dans quel paradigme l'élève travaille-t-il, et qu'est-ce qui constitue une validation acceptable à ce niveau ?

Partie 1 – Cycle 3

Reconnaître, décrire, reproduire et construire des figures, en vérifiant leurs propriétés avec les instruments.

1. Objets de base et relations

Savoirs

- Point, droite, demi-droite, segment ; alignement ; appartenance (∈) ; notations (AB), [AB), [AB] et longueur AB.
- Perpendicularité : deux droites sécantes qui forment un angle droit. Parallélisme : deux droites qui n'ont aucun point commun ou qui sont confondues.
- Milieu d'un segment, distance entre deux points, distance d'un point à une droite.
- Cercle (centre, rayon, diamètre, corde), disque ; le cercle est l'ensemble des points situés à une distance donnée du centre.

Obstacles et erreurs

- Croire que deux droites ne sont parallèles que si elles sont « horizontales » ou « verticales » : l'orientation du dessin est un obstacle récurrent.
- Confondre droite, demi-droite et segment ; confondre cercle et disque.
- Penser que « perpendiculaire » exige que les deux segments se touchent : les droites prolongent les segments.

Exemple type concours

> Analyser une consigne d'élève de CM1 : « trace une perpendiculaire à (d) passant par A » avec A hors de (d). Décrire les deux techniques (équerre, compas) et en quoi la seconde relève déjà d'une propriété.

2. Les triangles

Savoirs

- Triangle quelconque, isocèle (deux côtés de même longueur), équilatéral (trois côtés de même longueur), rectangle (un angle droit).
- Un triangle isocèle possède un axe de symétrie ; un triangle équilatéral en possède trois.
- Hauteur (perpendiculaire à un côté passant par le sommet opposé) : notion introduite pour le calcul d'aire.
- Construction d'un triangle connaissant les longueurs de ses trois côtés (compas) ; condition d'existence abordée par l'expérience.

Obstacles et erreurs

Un triangle isocèle ou rectangle présenté dans une position non prototypique (sommet vers le bas, angle droit à l'oblique) n'est plus reconnu. Il faut varier systématiquement les orientations.

Exemple type concours

> Proposer une séquence de CM2 sur l'inégalité triangulaire par construction avec des bandes de longueurs 3, 4 et 8 cm : repérer la phase de recherche, la mise en commun et l'institutionnalisation.

3. Les quadrilatères usuels

Savoirs

Figure	Définition retenue au cycle 3	Propriétés à connaître
Rectangle	Quadrilatère ayant quatre angles droits	Côtés opposés égaux et parallèles ; diagonales de même longueur, de même milieu
Losange	Quadrilatère ayant quatre côtés égaux	Côtés opposés parallèles ; diagonales perpendiculaires, de même milieu
Carré	Quadrilatère ayant quatre côtés égaux et quatre angles droits	Réunit celles du rectangle et du losange

Obstacles et erreurs

- « Un carré n'est pas un rectangle » : l'élève oppose les familles au lieu de les inclure. Le carré est un rectangle particulier et un losange particulier.
- Reconnaître un losange uniquement lorsqu'il est « posé sur la pointe » ; ne plus voir un carré incliné.
- Utiliser le mot « diagonale » pour tout segment intérieur.

Exemple type concours

> Tracer un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires et de même milieu, mais de longueurs différentes. Quelle figure obtient-on ? (Un losange non carré.) Quelle propriété d'élève (« les diagonales égales ») est mise en défaut ?

4. Symétrie axiale

Savoirs

- Deux figures sont symétriques par rapport à une droite si elles se superposent par pliage le long de cette droite.
- Propriétés admises en cycle 3 : conservation des longueurs, des angles, des aires et du parallélisme.
- Axes de symétrie des figures usuelles (rectangle : 2 ; losange : 2 ; carré : 4 ; cercle : une infinité).
- Construction du symétrique d'un point par report à l'équerre et au compas, puis d'une figure sur papier quadrillé ou pointé.

Obstacles et erreurs

Axe oblique mal géré ; décalage au lieu de retournement ; croire qu'un parallélogramme non particulier a un axe de symétrie.

Exemple type concours

> Expliquer pourquoi le symétrique d'un point par rapport à (d) doit se construire sur la perpendiculaire à (d) passant par ce point, et à égale distance de (d).

5. Reproduction, programmes de construction et géométrie dynamique

Savoirs

- Reproduire une figure : analyser la figure (sous-figures, propriétés), choisir un ordre de tracé, vérifier.
- Rédiger et exécuter un programme de construction ; coder en blocs (déplacements, répétitions) le tracé d'un carré ou d'un triangle équilatéral.
- Utiliser un logiciel de géométrie dynamique : déplacer une figure sans la déformer permet de distinguer ce qui est dessiné de ce qui est construit.

Exemple type concours

> Programme de construction : « Tracer un cercle de centre O et de rayon 4 cm. Placer un point A sur ce cercle. Tracer le cercle de centre A et de rayon 4 cm ; il coupe le premier en B et C. » Quelle est la nature du triangle OAB ? (Équilatéral : OA = OB = AB = 4 cm.)

Partie 2 – Cycle 4

Faire des conjectures, les valider par une preuve, et rédiger une démonstration structurée.

1. Du dessin à la figure : hypothèses, codage, logique

Savoirs

- Lire et produire un codage (égalités de longueurs, angles droits, parallélisme). Le codage porte l'information donnée, pas ce qu'on observe.
- Vocabulaire : définition, propriété, conjecture, théorème, contre-exemple, réciproque.
- Une propriété et sa réciproque ne sont pas équivalentes : « un losange a ses diagonales perpendiculaires » n'implique pas que tout quadrilatère aux diagonales perpendiculaires soit un losange.

Obstacles et erreurs

Prendre une mesure ou une lecture sur le dessin pour une preuve ; utiliser la conclusion comme hypothèse ; confondre propriété et réciproque.

Exemple type concours

> Donner un contre-exemple à : « un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange » (un cerf-volant non losange convient).

2. Droites parallèles, angles et somme des angles d'un triangle

Savoirs

- Angles opposés par le sommet (égaux) ; angles alternes-internes et correspondants (égaux si et seulement si les droites sont parallèles).
- Somme des angles d'un triangle : 180°. Démonstration : on trace par A la parallèle à (BC) ; les angles alternes-internes ramènent les trois angles du triangle sur un angle plat.
- Conséquences : angles d'un triangle isocèle (angles à la base égaux), angle extérieur égal à la somme des deux angles non adjacents.

Exemple type concours

> Dans un triangle isocèle en A d'angle au sommet 40°, calculer les angles à la base : (180 − 40) ÷ 2 = 70°. Rédiger la justification complète en citant la propriété utilisée à chaque étape.

3. Médiatrice, bissectrice et droites remarquables du triangle

Savoirs

- Médiatrice d'un segment : droite perpendiculaire en son milieu ; c'est aussi l'ensemble des points équidistants des extrémités.
- Bissectrice d'un angle : demi-droite qui le partage en deux angles égaux.
- Hauteurs, médianes, médiatrices : chaque famille est concourante. Les médiatrices se coupent au centre du cercle circonscrit.
- Triangle rectangle : le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse ; un triangle inscrit dans un cercle dont un côté est un diamètre est rectangle.

- Droite des milieux (4e) : dans un triangle, la droite passant par les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté et le segment correspondant en mesure la moitié.

Exemple type concours

> Le triangle ABC est inscrit dans un cercle de diamètre [AB] et C est un point du cercle distinct de A et B. Montrer que ABC est rectangle en C : le centre O du cercle est le milieu de [AB] et OC = OA = OB, donc la médiane [CO] mesure la moitié du côté [AB]. Le triangle est donc rectangle en C.

4. Parallélogrammes et quadrilatères particuliers

Savoirs

- Parallélogramme : quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles. Propriétés : côtés opposés égaux, angles opposés égaux, diagonales de même milieu.
- Caractérisations (pour démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme) : côtés opposés parallèles, ou côtés opposés égaux, ou deux côtés opposés parallèles et égaux, ou diagonales de même milieu.
- Hiérarchie : carré $\subset$ rectangle et losange $\subset$ parallélogramme $\subset$ quadrilatère.
- Pour montrer qu'un parallélogramme est un rectangle : un angle droit, ou diagonales égales. Pour montrer que c'est un losange : deux côtés consécutifs égaux, ou diagonales perpendiculaires.

Exemple type concours (démonstration rédigée)

> Énoncé : ABCD est un parallélogramme dont les diagonales ont la même longueur. Montrer que c'est un rectangle.
>
> Rédaction : ABCD est un parallélogramme et AC = BD. Or un parallélogramme dont les diagonales ont la même longueur est un rectangle. Donc ABCD est un rectangle.

5. Transformations, polygones réguliers et agrandissements

Savoirs

- Symétrie centrale, translation, rotation : elles conservent longueurs, angles, aires et parallélisme. Elles fournissent des figures « égales » que l'on peut superposer.
- Homothétie et agrandissement-réduction de rapport k : les longueurs sont multipliées par k, les aires par k^2, les angles sont conservés.
- Polygones réguliers : côtés égaux et angles égaux ; triangle équilatéral, carré, hexagone régulier (inscrit dans un cercle, côté égal au rayon).
- Triangles égaux (4e) : cas d'égalité par trois côtés, un angle et deux côtés adjacents, un côté et deux angles adjacents.

Exemple type concours

> Un hexagone régulier est inscrit dans un cercle de rayon 5 cm. Justifier que son côté mesure 5 cm : chaque angle au centre vaut 360° ÷ 6 = 60°, et le triangle formé avec deux rayons est isocèle avec un angle de 60°, donc équilatéral.

6. Rédiger une démonstration

Savoirs

1. Lire l'énoncé et faire un schéma codé avec les hypothèses.

2. Identifier la conclusion visée.
3. Pour chaque étape : donnée ou résultat déjà obtenu, propriété citée (en entier), conclusion.
4. Vérifier qu'aucune donnée n'a été lue sur le dessin.

Didactique

Les erreurs de rédaction les plus courantes sont l'oubli de la propriété, l'inversion de la propriété et de sa réciproque, et la présentation d'un résultat constaté comme un résultat démontré. En préparation au concours, entraînez-vous à analyser des copies d'élèves en classant ces erreurs.

Exemple type concours

> Analyser la copie suivante : « ABCD est un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires, donc c'est un losange ». Identifier l'erreur (réciproque non valable, hypothèse insuffisante) et proposer la propriété manquante (diagonales perpendiculaires **et de même milieu**).

Bilan : de la perception à la preuve

Thème	Cycle 3	Cycle 4
Triangles	Reconnaître, construire avec compas, hauteur pour l'aire	Somme des angles, droites remarquables, cercle circonscrit, égalité de triangles
Quadrilatères	Rectangle, losange, carré par propriétés observées et vérifiées	Parallélogramme, caractérisations, démonstrations
Symétries	Axiale par pliage et construction	Axiale, centrale, translation, rotation, homothétie
Validation	Instruments, pliage, logiciel	Démonstration rédigée

Pour la préparation : alternez exercices de niveau collège, analyses de productions d'élèves et construction de séquences. Le jury attend à la fois une maîtrise rigoureuse des savoirs et une lecture didactique des obstacles.

Vérifiez toujours les attendus et le référentiel de la session visée et complétez ce cours par des annales corrigées.