Initiation aux fractions, quotients et simplifications

Préparation CRPE – Disciplinaire et Didactique (Cycle 3 / Cycle 4)

Pour le CRPE, la maîtrise des fractions et des quotients est fondamentale, tant pour la partie disciplinaire (résolution de problèmes complexes sans calculatrice) que pour la didactique (compréhension des ruptures conceptuelles entre les entiers et les rationnels).

1. Qu'est-ce qu'une fraction ? Les sens multiples du quotient

En mathématiques, une fraction n'est pas seulement un « morceau de gâteau ». Il est crucial de distinguer les trois grands sens du nombre rationnel en primaire/collège :

- **Sens partiel-tout (ou aire) :** Partager une unité en parts égales. Dans la fraction a/b (avec $b \neq 0$), b est le dénominateur (nombre de parts égales dans l'unité) et a est le numérateur (nombre de parts prises).
- **Le quotient (sens opératoire) :** La fraction a/b est le nombre qui, multiplié par b, donne a. C'est le résultat de la division de a par b. Autrement dit : $b \times (a/b) = a$.
- **Sens opérateur (ou proportion) :** Prendre a/b d'une quantité Q, c'est calculer $Q \times a \div b$ ou $(Q \div b) \times a$.

2. Égalité de fractions et amplifications / simplifications

> **Propriété fondamentale :** La valeur d'une fraction ne change pas si l'on multiplie (ou si l'on divise) son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul.
> Pour tous nombres a, b et k (avec $b \neq 0$ et $k \neq 0$) :
> $a / b = (a \times k) / (b \times k)$ et $a / b = (a \div k) / (b \div k)$

Simplification de fractions : Simplifier une fraction, c'est trouver une fraction égale dont les termes sont plus petits. Pour obtenir une fraction irréductible, on divise le numérateur et le dénominateur par leur **Plus Grand Commun Diviseur (PGCD)**.

Exemple : Simplifier $120 / 315$. On décompose en facteurs premiers : $120 = 2^3 \times 3 \times 5$ et $315 = 3^2 \times 5 \times 7$. Le PGCD est $3 \times 5 = 15$. On obtient $8 / 21$.

3. Comparaison de fractions

Pour comparer deux fractions, plusieurs stratégies s'offrent à vous :

- **Même dénominateur :** On compare les numérateurs. La plus grande est celle qui a le plus grand numérateur.
- **Même numérateur :** On compare les dénominateurs. La plus grande est celle qui a le plus petit dénominateur (les parts sont plus grandes).
- **Réduction au même dénominateur :** On transforme l'une ou les deux fractions pour partager le même dénominateur.
- **Passage à l'écriture décimale :** Lorsque la division tombe juste ou offre une approximation exploitable.

4. Opérations de base sur les fractions

- **Addition et Soustraction :** Il est IMPÉRATIF d'avoir le même dénominateur.
  $(a / c) + (b / c) = (a + b) / c$
- **Multiplication :** On multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.
  $(a / b) \times (c / d) = (a \times c) / (b \times d)$
  Astuce CRPE : Pensez à simplifier (barrer les facteurs communs) avant d'effectuer les multiplications !
- **Division :** Diviser par une fraction, c'est multiplier par son inverse.
  $(a / b) \div (c / d) = (a / b) \times (d / c) = (a \times d) / (b \times c)$

5. Vigilance didactique (Spécial CRPE)

> **Conceptions erronées fréquentes chez les élèves :**
> - **L'obstacle des nombres entiers :** L'élève pense que $1/4$ est plus grand que $1/2$ parce que 4 est plus grand que 2 (interférence avec l'ordre des entiers naturels).
> - **L'erreur additive :** L'élève calcule $1/2 + 1/3 = 2/5$ en additionnant les numérateurs et les dénominateurs entre eux. C'est l'erreur classique par excellence à anticiper et contrer par des représentations géométriques (aires).