PRÉPARATION CRPE

FICHE DE COURS : ARITHMÉTIQUE DE BASE ET JEUX SUR LES NOMBRES

1. NOTIONS THÉORIQUES FONDAMENTALES

A. Division euclidienne et divisibilité

Pour tous entiers a ($a \geq 0$) et b ($b > 0$), il existe un unique couple d'entiers (q, r) tel que :

Formule fondamentale : $a = b \times q + r$ avec $0 \leq r < b$

- **a :** dividende, **b :** diviseur, **q :** quotient, **r :** reste.
- Si r = 0, on dit que b divise a (ou que a est un multiple de b).

B. Critères de divisibilité essentiels

Un entier est divisible par :

- **2 :** si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.
- **3 :** si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.
- **4 :** si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.
- **5 :** si son chiffre des unités est 0 ou 5.
- **9 :** si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.
- **10 :** si son chiffre des unités est 0.
- **11 :** si la différence alternée de ses chiffres est divisible par 11.

C. Nombres premiers et décomposition

- **Nombre premier :** Entier naturel qui possède exactement deux diviseurs distincts (1 et lui-même). *Attention : 1 n'est pas un nombre premier.*
- **Théorème fondamental de l'arithmétique :** Tout entier $n > 1$ se décompose de manière unique (à l'ordre près) en un produit de facteurs premiers :
  $n = p_1^{b1} \times p_2^{b2} \times \ldots \times p_m^{bm}$
- **Nombre de diviseurs :** Pour $n = p_1^a \times p_2^b$, le nombre total de diviseurs est donné par la formule $(a + 1)(b + 1)$.

D. PGCD et PPCM

- **PGCD (Plus Grand Commun Diviseur) :** S'obtient en prenant les facteurs premiers communs munis de leur plus petit exposant.
- **PPCM (Plus Petit Commun Multiple) :** S'obtient en prenant tous les facteurs premiers présents munis de leur plus grand exposant.
- **Propriété clé :** $PGCD(a, b) \times PPCM(a, b) = a \times b$
- **Nombres premiers entre eux :** Deux nombres a et b sont premiers entre eux si leur PGCD est égal à 1.

2. NUMÉRATION DE POSITION ET CODAGE ALGÉBRIQUE

Pour résoudre les « jeux sur les nombres » (devinettes, cryptarithmes, nombres mystères), il est indispensable d'utiliser la décomposition en base 10 :

- Un nombre à deux chiffres ab s'écrit : **10a + b**
- Un nombre à trois chiffres abc s'écrit : **100a + 10b + c**

Exemple de résolution type CRPE

Énoncé du problème :
« Je suis un nombre à deux chiffres. La somme de mes chiffres est 11. Si l'on inverse mes chiffres, le nouveau nombre dépasse l'ancien de 27. Qui suis-je ? »

Solution étape par étape :

1. Mise en équation : Soit N = ab = 10a + b.
• Condition 1 : a + b = 11
• Nouveau nombre : ba = 10b + a
• Condition 2 : (10b + a) - (10a + b) = 27 $\Longrightarrow$ 9b - 9a = 27 $\Longrightarrow$ b - a = 3

2. Résolution du système : • a + b = 11
• b - a = 3
En additionnant membre à membre : 2b = 14 $\Longrightarrow$ b = 7, d'où a = 4.

3. Conclusion : Le nombre recherché est 47.

3. REPÈRES DIDACTIQUES (CYCLES 1, 2 ET 3)

A. Progression sur les nombres et l'arithmétique

Cycle	Objectifs et Contenus
Cycle 1 (Maternelle)	Construction du nombre (quantité, cardinal, ordinal), comptage, décomposition des petits nombres jusqu'à 10.
Cycle 2 (CP - CE1 - CE2)	Principe de la numération décimale de position (unités, dizaines, centaines), procédures élémentaires de calcul mental et écrit.
Cycle 3 (CM1 - CM2 - 6e)	Multiples et diviseurs, critères de divisibilité (2, 3, 4, 5, 9, 10), consolidation de la division euclidienne et découverte de la notion de nombre premier.

B. Obstacles et erreurs fréquents chez les élèves

- **Erreurs de numération :** Écriture en miroir (ex. écrire 31 pour 13) ou mauvaise compréhension de la valeur de position (ex. dans 342, considérer que le « 3 » vaut 3 et non 300).
- **Jeux sur les nombres :** Difficulté importante à passer du langage naturel à la modélisation symbolique mathématique (mise en équation).